181

Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine de direction E (un $\mathbb{R}$-espace vectoriel), I un ensemble, $\sigma\in\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}_\sigma^{(I)} = \{(x_i)\in\mathbb{R}^{(I)} \mid \sum_{i\in I} x_i = \sigma\}$

I] Barycentres dans un espace affine

1] Notion de barycentre

II.2 [Tau]

Proposition 1: Soit $(\lambda_i)\in\mathbb{R}_\sigma^{(I)}$, $(A_i)\in\mathcal{E}^I$.

Alors: $\exists! G\in\mathcal{E} \mid \sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$ et $\forall P\in\mathcal{E}$, $\sigma\overrightarrow{PG} = \sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{PA_i}$

Définition 2: Dans ce cas, on dit que G est le barycentre de la famille $(A_i;\lambda_i)$. L'isobarycentre des $(A_i)_{i=1}^n$ est le barycentre de $(A_i;\frac{1}{n})_{i=1}^n$.

Exemple 3: L'isobarycentre de $(A_1;A_2)\in\mathcal{E}^2$ est le milieu du segment $[A_1;A_2]$.

Proposition 4: Soit G barycentre de $(A_i;\lambda_i)$ et $(I_j)_{j\in J}$ partition de I tel que $\forall j\in J$, $\sigma_j := \sum_{i\in I_j}\lambda_i \neq 0$ et G_j barycentre de $(A_i;\lambda_i)_{i\in I_j}$.

Alors: G est le barycentre de $(G_j;\sigma_j)_{j\in J}$

Corollaire 5: Si de plus, I est fini, $(I_1;\dots;I_n)$ est une partition de I et $\{\alpha_1;\dots;\alpha_n\}$ tels que $\sum \alpha_i = 1$ tels que $\forall k\in[\![1;n]\!]$, $\sum_{i\in I_k}\lambda_i = 1$ et soit G_k le barycentre de $(A_i;\lambda_i)_{i\in I_k}$ et G celui de $(A_i;\sigma_k)_{k=1}^n$.

Alors: G est barycentre de $(A_i;\sigma_k\lambda_i)_{i\in I}$ pour tout $k\in[\![1;n]\!]$.

Proposition 6: Soit G barycentre de $(A_i;\lambda_i)_{i\in I}$ et $P\in\mathcal{E}$, $(\theta_i)\in\mathbb{R}_1^{(I)}$.

Alors: $\overrightarrow{PG} = \sum_{i\in I}\theta_i\overrightarrow{PA_i}$.

Proposition 7: Réciproquement, si $(\mu_i)\in\mathbb{R}_1^{(I)}$ et $P,Q\in\mathcal{E}$.

Alors: $\sum_{i\in I}\mu_i\overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{PQ} + \sum_{i\in I}\mu_i\overrightarrow{QA_i}$

2] Caractérisation et application aux polygônes

II.3 [Tau]

Théorème 8: Soit $\emptyset\neq\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}$.

Alors: $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ssi tout barycentre d'une famille de points de $\mathcal{F}$ appartient à $\mathcal{F}$.

Corollaire 9: Dans ce cas, on a aussi:

$\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ ssi $\forall P,Q\in\mathcal{F}$, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda+\mu=1 \Rightarrow \lambda P+\mu Q\in\mathcal{F}$.

Définition 10: Soit $\emptyset\neq\mathcal{A}\subseteq\mathcal{E}$. On appelle sous-espace affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{A}$ le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$. Noté $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$.

Proposition 11: $\mathrm{Aff}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des barycentres des familles de points de $\mathcal{A}$, de direction $\mathrm{Vect}(\mathcal{A}-A)$ avec $A\in\mathcal{A}$.

[Isa]

Lemme 12: (déterminant circulant) Soit $a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{C}^n$.

Alors: $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{jk}$

Application 13: Soit P polygône du plan complexe de sommets $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}^n$, soit $P_0=P$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, P_{k+1} le polygône dont les sommets sont les milieux des arêtes de P_k.

Alors: $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de P.

3] Coordonnées barycentriques

II.8 [Tau]

Théorème 14: Soit $(A_i)_{i\in I}$ base affine de $\mathcal{E}$.

Alors: tout point $M\in\mathcal{E}$ est barycentre d'une famille $(A_i;\lambda_i)_{i\in I}$

Corollaire 15: Si de plus $(\lambda_i)\in\mathbb{R}_1^{(I)}$

Alors: cette famille est unique.

Définition 16: Dans ce dernier cas, on appelle (λ_i) système de coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A_i).

V.2 [Aud]

Proposition 17: Soit ABC triangle de $\mathcal{E}$ et $M\in ABC$.

Alors: les coordonnées barycentriques de M dans le repère $(A;B;C)$ sont: $(\mathrm{Aire}(MBC);\mathrm{Aire}(MCA);\mathrm{Aire}(MAB))$.

II] Convexité dans un espace affine

1] Notion de convexité

IV.2 [Tau]

On suppose par la suite $\mathcal{E}$ de plus euclidien.

Définition 18 : Soit $(A_i) \in \mathcal{E}^I$ et $B \in \mathcal{E}$. On dit que B est combinaison convexe de (A_i) s'il existe $(t_i) \in \mathbb{R}^{(I)}_{1,+}$ tels que $B = \sum_{i \in I} t_i A_i$.

Exemple 19 : Soit $A, B \in \mathcal{E}$. Le segment $[A;B]$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $(A;B)$.

Définition 20 : On dit que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ est étoilé en un de ses points $M \in \mathcal{A}$ si : $\forall N \in \mathcal{A}$, $[M;N] \subseteq \mathcal{A}$.
On dit que $\mathcal{A}$ est convexe s'il est étoilé en tous ses points.

Exemple 21 : Les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 22 : Les sous-espaces, les boules et les intersections de convexes sont convexes.

Proposition 23 : Les convexes sont connexes par arcs.

Théorème 24 : $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ est convexe ssi toute combinaison convexe de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition 25 : L'image et l'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.

2] Enveloppe convexe

IV.3 [Tau]

Définition 26 : L'enveloppe convexe d'une partie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$, notée $Cv(\mathcal{A})$, est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$. C'est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.

Proposition 27 : (théorème de Lucas) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$.
Alors : toute racine de P' appartient à $Cv(\{\text{racines de } P\})$.

IV.3 [Tau]

Proposition 28 : Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.
Alors : (1) $Cv(\mathcal{A})$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $\mathcal{A}$.
(2) $\overline{Cv(\mathcal{A})}$ est l'intersection des convexes fermés de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{A}$.

Proposition 29 : Soit $\mathcal{A}$ convexe compact de $\mathcal{E}$.
Alors : $\mathcal{A} = Cv(\partial\mathcal{A})$

Proposition 30 : Soit $\mathcal{A}$ ouvert
Alors : $Cv(\mathcal{A})$ est ouvert.

Contrexemple 31 : L'enveloppe convexe d'un fermé n'est pas forcément fermé. Pour $\mathcal{A} = \{(0;0)\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid xy \geq 1\}$, $Cv(\mathcal{A}) = \{(0;0)\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}_+^{*2}\}$ n'est pas fermé.

Théorème 32 : (de Carathéodory) Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.
Alors : Tout élément de $Cv(\mathcal{A})$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de $\mathcal{A}$ avec $k \leq 1 + \dim(\mathcal{E})$.

Corollaire 33 : Soit $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$.
Alors : (1) Si $\mathcal{A}$ est compacte, alors $Cv(\mathcal{A})$ est compact
(2) Si $\mathcal{A}$ est bornée, alors $Cv(\mathcal{A})$ est borné et $\operatorname{diam}(\mathcal{A}) = \operatorname{diam}(Cv(\mathcal{A}))$

3] Points extrémaux d'un convexe

IV.8 [Tau]

Soit par la suite $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ convexe.

Définition 34 : On dit que $M \in \mathcal{E}$ est un point extrémal de $\mathcal{A}$ si : $\forall t \in [0;1], \forall P, Q \in \mathcal{E}$, $M = tP + (1-t)Q \Rightarrow M = P$ ou $M = Q$.
On note $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{A}$.

Proposition 35 : Si $O \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$
Alors : $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{B}}(O;r)) = \partial\mathcal{B}(O;r)$

Proposition 36 : Soit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ convexe, $M \in \mathcal{A}$.
Alors : $M \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ ssi $\mathcal{A} \setminus \{M\}$ est convexe
ssi si M est combinaison convexe d'éléments de $\mathcal{A}$, alors M est égal à un de ces éléments.

[Les]

Théorème 37: (de Krein - Milman) Soit $K \subseteq E$ convexe compact non-vide.
Alors: K est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux
i.e. $K = Cv(E(K))$.

Application 38: (théorème de Choquet) Soit E espace euclidien, $K \subseteq E$ convexe compact tel que $E(K)$ est compact, soit $l : E \to \mathbb{R}$ linéaire, continue sur E.
Alors: l atteint un minimum sur K en un point extrémal de K.

Références :

[Tau] Géométrie - Tauvel

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques - Isenmann

[Aud] Géométrie - Audin

[Les] 131 développements pour l'oral - Lesesvre